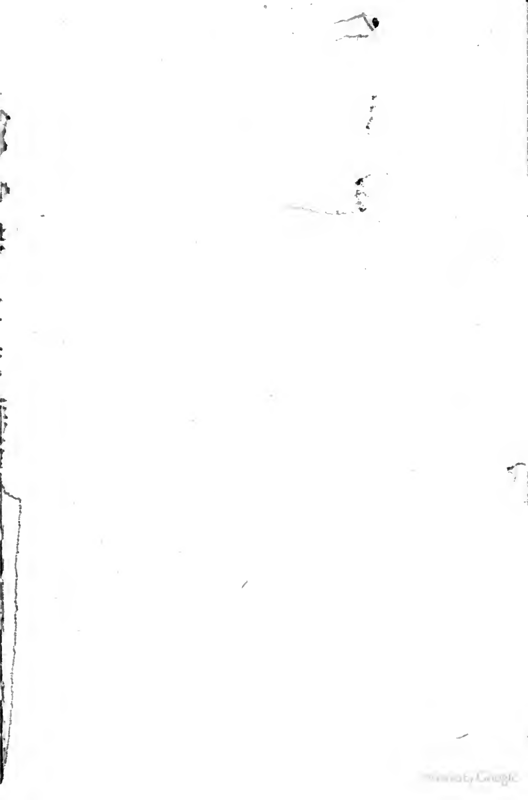
HANKEL

MATHEMATIK





DIE ENTWICKELUNG

DER

MATHEMATIK

IN DEN

LETZTEN JAHRHUNDERTEN.

EIN VORTRAG

BEIM

EINTRITT IN DEN AKADEMISCHEN SENAT

DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN

AM 29. APRIL 1869 GEHALTEN

VON

DR. HERMANN HANKEL,

ORD. PROFESSOR DER MATHEMATIK.



TÜBINGEN,

L. FR. FUES'SCHE SORTIMENTSBUCHHANDLUNG.

1869.



DRUCK VON L. FR. FUES IN TÜBINGEN.

Hochansehnliche Versammlung!

Als Sie diesen feierlichen Act, mit dem ich nach alter Sitte das durch die Gnade Seiner Majestät, unseres allergnädigsten Königs, und das Vertrauen des akademischen Senates mir übertragene Amt eines ordentlichen Professors der Mathematik und Astronomie an dieser Universität antrete, durch Ihre wohlwollende Gegenwart zu feiern beschlossen, hatten Sie ohne Zweifel den stillen Wunsch, ich möchte zwar als Mathematiker, doch m e n s c h l i c h, d. h. verständlich zu Ihnen reden. Ich will den Versuch machen, diesem berechtigten Wunsche nachzukommen; μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰςίτω — dies stolze Wort der platonischen Akademie soll heute n i c h t mein Wahlspruch sein.

Der Versuch ist nicht leicht. — Alle anderen Wissenschaften stehen dem allgemein menschlichen oder allgemein wissenschaftlichen Interesse schon dadurch nahe, dass sie Probleme behandeln, an denen mehr oder minder jede geistig regsame Menschennatur arbeitet, oder dass doch ihr Material ein gegebenes und bekanntes ist. Lenkt man nur die Aufmerksamkeit auf jene Probleme oder diesen Stoff, so ist man sofort des lebhaftesten Interesses gewiss.

Ganz anders die Mathematik! Ihre Probleme entwickeln sich ausschliesslich aus ihr selbst; ihr Material ist die reine Anschauung des Raumes, der Zeit,

und der abstracte Begriff der Grösse. In allen diesen liegen keine Geheimnisse der Art, wie sie die Wissbegier anzuziehen pflegen. Der Stoff erscheint dem einfachen Verstande so kalt und leer, die ganze Mathematik als eine nichtssagende Trivialität, ein trockenes Idem per idem, ein Nichts, das nur durch seine abstruse Form den Schein von Etwas erhält. So ist denn das Vorurtheil fertig, welches dem, der dieser Wissenschaft sein Leben gewidmet hat, zugleich befremdlich und schmerzlich ist, — dies Vorurtheil, welches Männer wissenschaftlicher Bildung oft genug veranlasst, sich zu rühmen, dass sie niemals ein Jota von Mathematik verstanden haben, gleichsam, als ob sie sich dadurch den Adelsbrief für Esprit und Geist ausstellen wollten!

Freilich, wie unsere Wissenschaft auf den meisten Schulen unseres Vaterlandes getrieben wird, da ist sie trocken, — unglaublich trocken — fast so trocken als die Declinationen der lateinischen Grammatik. Aber ist das Philologie? und sind jene Elemente mathematische Wissenschaft?

Nicht eher wird die Mathematik in weiteren Kreisen ihre richtige Würdigung finden, als bis man in den Schulen mehr als das Abc derselben lehrt, und die unglückselige Meinung beseitigt ist, dass sie im Unterrichte weiter keinen Zweck habe, als den Geist formal zu bilden. Die Mathematik hat ihren Zweck im Inhalt; ihre Form ist nebensächlich und muss nicht nothwendig diejenige sein, die sie historisch geworden ist, weil

sie unter dem Einflusse griechischer Logik zuerst feste Gestalt gewann.

Mathematik mag man ihres formalen Nutzens wegen mit demselben Rechte treiben, als Geschichte — zur Stärkung des Gedächtnisses! Was für ein Ungeheuer ein solcher Unterricht ist, brauche ich vor einem akademischen Publikum nicht auseinander zu setzen.

Erfreulicher Weise hat der Unterricht auf den Universitäten nicht so enge Grenzen, und, wer je an einem solchen Theil genommen, weiss, dass die Mathematik dem Geiste unendlich mehr, als einen nur formalen Nutzen gewährt, dass sie ihn vielmehr bereichert um die Erkenntniss eines Gebietes, welches rein geistiger Natur, und, wenngleich es die Formen von Raum und Zeit umfasst, dennoch absolut, und von Raum und Zeit nicht bedingt ist.

Wie die Sachen heute liegen, ist jedoch der Kreis derer, die soweit in das Innere dieser Wissenschaft eindringen, zu klein, als dass er die öffentliche Meinung unserer Zeit, welche die Anwendungen der Mathematik in der Astronomie, Physik, und der Technik wohl zu schätzen weiss, zu bestimmen vermöchte; und Mathematik gilt in weiteren Kreisen noch immer als die Wissenschaft von rein formalem Werthe und trockenstem Inhalt.

Hochansehnliche Versammlung! Ich benutze mit Freuden diese, mir heute gebotene Gelegenheit zu einer *oratio pro domo* und wünschte Ihnen ein Bild von dem

inneren Wesen und Leben meiner Wissenschaft geben zu können. Ich habe geglaubt, diesen Zweck am Besten zu erreichen, wenn ich Ihnen eine Skizze der Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten vorführe; denn ich darf vielleicht so am ehesten hoffen, Ihre gütige Aufmerksamkeit nicht allzusehr zu ermüden. — — —

Bei einer so conservativen Wissenschaft, als die Mathematik, welche die Arbeiten früherer Perioden nie zerstört, um an ihre Stelle neue Gebäude aufzuführen, ist es begreiflich, dass man eine Zeit nicht ohne Beziehung zur Vergangenheit betrachten kann: und so sei es mir erlaubt, mit wenigen Worten auf das Alterthum zurückzugreifen.

Mathematik als Wissenschaft verdankt ihren Ursprung dem idealistischen Bedürfnisse griechischer Philosophen, und nicht, wie die Fabel geht, practischen Forderungen ägyptischer Staatswirthschaft *).

*) Es ist allerdings wohl glaublich, dass, wie eine ganze Reihe von griechischen Schriftstellern bezeugen, Aegyptens eigenthümliche landwirthschaftliche Verhältnisse schon frühzeitig zu ausgedehnten Landesvermessungen geführt haben. Im besten Falle würde dies Culturland somit die Wiege der Feldmesskunst sein, die trotz ihrer steten Anwendung noch von den römischen Gromatikern des Kaiserreiches in unglaublich roher Weise ausgeübt wurde. Welch' ein ungeheurer Schritt von dieser Kunst bis zu den μαθήματα, die bereits Pythagoras die λαβὰς φιλοσοφίας nannte! Adam war, als er jeglichem Vieh unter dem Himmel seinen Namen gab, kein Zoolog, und die ägyptischen Feldmesser keine Mathematiker. Wissenschaft entstand allererst bei den Griechen, und schon Platon nennt γεωμετρία ein ὄνομα γελοῖον.

Thales, Pythagoras, Platon, das sind die ersten mathematischen Denker; τοῦ γὰρ ἀεὶ ὄντος ἡ γεωμετρικὴ γνῶσίς ἐστιν ihr Wahlspruch.

Die eigentliche literarische Geschichte der Mathematik beginnt jedoch erst mit den „Elementen", die Euklides im dritten Jahrhundert vor Anfang unserer Zeitrechnung verfasste.

Wie Pallas aus dem Kopfe des Zeus entsprang, gewappnet und gerüstet, so tritt die Mathematik hier auf. Wunderbare Klarheit und Bestimmtheit der Begriffe, strengste Consequenz in deren Verbindung, höchste Einfachheit der Darstellung, das sind die Eigenschaften dieses unsterblichen Werkes, die niemals wieder in gleicher Weise vereinigt gewesen sind. Die „Elemente" des grossen Alexandriners bleiben für alle Zeiten das erste und, man darf vielleicht behaupten, das einzige vollkommene Muster von logischer Schärfe in den Principien und von strenger Entwickelung der Sätze. Will man sehen, wie eine Wissenschaft auf einer sehr geringen Zahl von anschaulichen Axiomen, Postulaten und schlichten Definitionen, durch einen strengen, an keiner Stelle erschlichenen oder nach fremden Hilfsmitteln greifenden, wir möchten sagen, keuschen Syllogismus aufgebaut, und bis in die kleinsten Details ausgebaut werden kann, so muss man zu Euklid's Elementen greifen.

Diese strenge Form ist von jener Zeit an der griechischen Mathematik eigenthümlich gewesen, und ihr hat man es zu danken, dass unsere Wissenschaft vor aller Unklarheit der Principien, vor dem Unwesen all-

gemeiner, und in ihrer Allgemeinheit nichts sagender Raisonnements, vor der Ueberstürzung bodenloser Speculation, kurz vor allen den Fehlern bewahrt worden ist, welche die Philosophie in ihrer Entwickelung so schwer geschädigt haben. Freilich ist es nicht die Form allein, welche der Mathematik die Garantie für die Gewissheit ihrer Theorien gibt; denn die Euklidische Form hat den Systemen eines Spinoza oder Christian Wolff auch keine ewige Dauer verliehen.

Wenn nun die griechischen Geometer in formaler Hinsicht mustergültig und durch ihren eminenten Scharfsinn, sowie eindringende Erfindungsgabe für alle Zeiten bewundernswürdig sind, so fehlt ihnen doch Eine Seite der wissenschaftlichen Auffassung, auf welche sich der Sinn der neueren Völker mit besonderer Vorliebe gerichtet hat: Sie kennen nur den synthetisch vorschreitenden Entwickelungsgang; es fehlen ihnen allgemeine Principien und Methoden; sie haben eine entschiedene Vorliebe für das Specielle und für die enge Begrenzung der Begriffe. So viele verschiedene Fälle in Bezug auf die Lage der Linien in einer Aufgabe möglich sind, so viele verschiedene Probleme sind für den griechischen Geometer vorhanden; und die grössten Mathematiker des Alterthums haben es für nothwendig gehalten, in ihren Schriften die sämmtlichen denkbaren, oft sehr zahlreichen Fälle von einander unabhängig, alle mit derselben Ausführlichkeit zu erledigen. Die Methode zu entwickeln, nach der diese verschiedenen Fälle behandelt werden könnten, die Begriffe

in entsprechender Weise zu erweitern und aus den concreten Fällen ein allgemeines Resultat zu abstrahiren, kommt ihnen nicht bei.

So opfert die antike Geometrie zu Gunsten einer scheinbaren Einfachheit und Anschaulichkeit, die wahre Einfachheit auf, welche in der Allgemeinheit der Principien, und die wahre Anschaulichkeit, welche in der Erkenntniss des Zusammenhangs geometrischer Gestalten in allem Wechsel und in aller Veränderlichkeit ihrer sinnlich verstellbaren Lage beruht.

Vergleichen wir ein mathematisches Problem mit einem gewaltigen Felsen, in dessen Inneres wir eindringen wollen, so erscheint die Arbeit der griechischen Mathematiker uns als die eines rüstigen Steinhauers, der mit Hammer und Meissel in unermüdlicher Ausdauer den Felsen langsam von aussen her zu zerbröckeln beginnt; der moderne Mathematiker aber als ein trefflicher Minirer, der diesen Felsen zunächst mit wenigen Gängen durchzieht, von denen aus er dann den Felsblock mit einem gewaltigem Schlage zersprengt und die Schätze des Inneren zu Tage fördert.

Die grosse Veränderung, welche die Mathematik in dieser Beziehung durch die modernen Culturvölker erleiden sollte, spricht sich in sehr entschiedener Weise von dem ersten Momente an aus, in dem die mathematischen Studien nach dem Mittelalter einen neuen Aufschwung nahmen. Die Ehrfurcht vor den geometrischen Werken des Alterthums war unbegrenzt, aber es schien unmöglich auf dem von ihnen eingeschlagenen Wege

weiter vorzudringen; man fand ihre ganze Art zu denken und zu schreiben, so fremdartig und unverständlich, dass man darauf verzichtete, mit ihnen auf ihrem eigenen Felde zu concurriren und sich ganz der weiteren Förderung eines Zweiges hingab, der erst im Mittelalter entstanden und dem Geiste moderner Völker angemessener war, der „Coss", oder, wie wir heute sagen, der Arithmetik und Algebra *).

Während bei den alten Mathematikern nur von Linien die Rede ist, und selbst die Zahlen in dem Bilde solcher überall vorgestellt werden, so sind die Zahlen, die bereits im 16. Jahrhundert durch die Buchstaben, als allgemeine Zeichen symbolisirt werden, das eigentliche Element der gesammten neueren Mathematik. Selbst geometrische Grössen werden, als Zahlen, der Rechnung unterworfen, und erst, als es gelang, die Natur krummer Linien in sogenannte Formeln zu fassen und dem Calcul zu unterwerfen, konnte man auch in geometrischen Problemen wagen, mit den Alten zu rivalisiren. Der grosse Philosoph des 17. Jahrhunderts, Descartes, hat dies unsterbliche Verdienst, das uns für alle Zeiten von dem Banne gelöst hat, der bis dahin auf der Geometrie lag. Die analytische Geometrie, wie man die Methode des Descartes nannte,

---

*) Merkwürdig genug, dass die Renaissance hierin anknüpfen konnte, an den letzten Mathematiker des Alterthumes, Diophant (um 300 n. Chr.), der ganz ohne Vermittelung mit der antiken Wissenschaft plötzlich auftritt. Was für andere Luft weht in den Schriften dieses Arithmetikers, als in denen der classischen Geometer

führte bald zu einer Fülle neuer Sätze und neuer Principien, die weit über das hinausgingen, was auf der von den Alten betretenen Bahn je zu erreichen gewesen wäre.

Es erwuchsen aber aus dieser Methode, alle geometrischen Linien der Rechnung zu unterwerfen, neue Probleme hervor, welche die alten Geometer zwar in speciellen Fällen gelöst hatten, die aber jetzt in principieller Allgemeinheit auftraten: die Aufgaben, an jeder analytisch bestimmten krummen Linie Tangenten zu ziehen, den von ihnen eingeschlossenen Flächenraum zu finden u. s. w.

Es war ein dringendes wissenschaftliches Bedürfniss, Methoden zu schaffen, um diese mit Nothwendigkeit sich aufdrängenden Probleme zu lösen. Newton und Leibniz waren es, denen das Vielerstrebte gelang. Gleichzeitig erfand jener die Methode der Fluxionen, dieser die Differential- und Integralrechnung, beide von verwandten, aber doch verschiedenen Principien ausgehend, und zu demselben Ziele führend. Ins Besondere schuf Leibniz mit genialem philosophischen Blicke einen Formalismus, oder, wie wir Mathematiker sagen, einen Algorithmus, einen eigentlichen Calcul, durch welchen die schwierigsten Probleme, an denen sich die bisherigen Forscher ohne oder mit wenig Erfolg abgemüht hatten, mit Einem Schlage, mit wunderbarer Leichtigkeit gelöst wurden. Selbst abgesehen von der urkundlichen Wahrheit, ist es eine Thorheit, Leibniz als Plagiator Newton's hinzustellen. Hätte er

auch alle Methoden seines Rivalen gekannt, so würde sein Algorithmus allein ihn unsterblich gemacht haben; mit sicherem Gefühle hat dies bereits die Sprache anerkannt, indem sie Newton's Erfindung „methodus fluxionum et fluentium", Leibnizens aber den „calculus differentialis et integralis" genannt hat.

Es gibt kaum eine Zeit, in welcher die Mathematik grössere und schnellere Fortschritte gemacht hätte, als am Ende des 17. und Anfange des 18. Jahrhunderts. Mit Begeisterung ergriffen die jüngeren Mathematiker jener Zeit die neuen Methoden: Jedes Problem, das bis dahin aufgestellt war, wurde lösbar oder erschien in einem anderen Lichte; neue Aufgaben von bisher ungeahnter Tiefe und Allgemeinheit tauchten auf und enthüllten neue wunderbare Eigenschaften der Zahlen und der Grössen im Raume. Der berühmte Streit über die Priorität der neuen Methoden zwischen Leibniz und Newton, sowie über die Vorzüge der einen oder der anderen, der die mathematische Welt in zwei, durch das Meer und ihren Hass getrennte Lager theilte, trug, so unerfreulich er an sich war, selbst zu der Beschleunigung des Fortschrittes bei, indem herüber und hinüber die Kampfesforderungen zum wissenschaftlichen Turnier flogen. Bald forderten englische Gelehrte die Mathematiker des Continentes heraus, welche denn auch die Herausforderung annahmen und nach wenigen Tagen die Lösungen der gestellten Probleme vorlegten. Oder die Mathematiker der Leibnizischen Parthei stellten im stolzen Bewusstsein der Ueberlegenheit ihrer Me-

thode den Engländern eine Aufgabe; und dann hören wir wohl, dass Newton, ermüdet von seinen Directorialgeschäften in der Münze zurückkehrend, noch desselbigen Abends das Problem gelöst hatte.

Neben den beiden Häuptern Newton und Leibniz leuchten in dieser Zeit besonders noch Männer, wie Maclaurin, Taylor, das Brüderpaar Bernoulli, der Marquis de l'Hôpital u. a. hervor. Sie haben eine durchaus neue Zeit begründet. Die Schriften der vorhergehenden Periode sind durch sie vollkommen verdrängt, und haben nur noch rein historischen Werth; sie sind dem modernen Mathematiker höchst fremdartig; denn in der That athmen sie in einer noch ganz anderen Atmosphäre, als wir heut zu Tage.

In gewisser Hinsicht gilt dies wohl noch von den Schriften aus der Zeit Leibnizens. Denn, wenn man auch auf dem Contingente nicht so conservativ war, als in England, wo man rein geometrische Darstellung für die der Mathematik allein würdige hielt, so war doch der ganze Sinn dieser Zeit auf die Lösung geometrisch eingekleideter Probleme gerichtet, und das, was die Rechnung lieferte, hatte wesentlich den Zweck, wieder in geometrische Form umgesetzt zu werden.

Es ist das unschätzbare Verdienst des grossen Baseler Mathematikers Leonhard Euler, den analytischen Calcul von allen geometrischen Fesseln befreit, und damit die Analysis, als selbstständige Wissenschaft begründet zu haben, die nun von jener Zeit an die unbestrittene Herrschaft im Gebiete der Mathematik geführt hat.

Eingedenk des am Anfang meines Vortrages gegebenen Versprechens, muss ich hier auf eine eingehendere Erörterung über das Wesen der Analysis verzichten, und kann nur einiges Wenige andeuten. Der Name, der ursprünglich bei den Logikern eine, der Synthesis entgegengesetzte Methode bezeichnet, hat, wie eine Münze, sein ursprüngliches Gepräge nach und nach im Umlaufe fast ganz verloren. Wir verstehen heute unter Analysis im Gegensatze zur Arithmetik und Algebra diejenige Disciplin, welche sich nicht mit bestimmten, gegebenen oder gesuchten Grössen beschäftigt, sondern wesentlich die Verhältnisse sich stetig verändernder, im stetigen Abflusse verlaufender Quantitäten zu untersuchen hat. Sie stellt demgemäss an ihren Anfang den Begriff der Function, um eine gegenseitige Abhängigkeit zweier veränderlicher Grössen darzustellen. Man nennt eine Grösse eine Function einer anderen Veränderlichen, wenn man zu jedem Werthe der letzteren den entsprechenden Werth der ersteren bestimmen kann. Diese Bestimmung kann nach dem Wesen der Analysis in nichts anderem bestehen, als in der Angabe der Rechnungsvorschriften, durch welche eine Grösse aus der anderen abgeleitet werden soll. So z. B. verändert sich die Kraft, mit welcher sich nach dem Gravitationsgesetze zwei Himmelskörper anziehen, mit der Entfernung derselben, nimmt ab mit zunehmender und zu mit abnehmender Entfernung und dies proportional dem Quadrate derselben — eine Angabe, nach welcher die Analysis die

Grösse der Kraft für jede Entfernung berechnet. In diesem Falle nun sagen wir: die Kraft ist eine Function der Entfernung und zwar deren Quadrate umgekehrt proportional. So ist ferner die Höhe der Sonne über dem Horizonte eine Function der Tageszeit; die mittlere Barometerhöhe eines Ortes eine Function seiner Erhebung über die Meeresfläche, u. s. w.

Die adäquate Darstellung der Functionen im anschaulichen Raume ist die fundamentale Aufgabe der analytischen Geometrie, ihre rein abstracte Theorie die eigentliche höhere Analysis.

Der Begriff der Function, so selbstverständlich er uns heute erscheint, ist eine der grossartigsten Schöpfungen der neueren Mathematik. Nur langsam und zögernd hat er sich aus speciellen, ihm untergeordneten Begriffen entwickelt. Euler ist es gewesen, der ihn zuerst aufgestellt und zur Grundlage der gesammten Analysis gemacht, damit aber eine neue Periode der Mathematik herbeigeführt hat.

Es gibt Niemanden, der, wie er, in allen Theilen den Grund zu dem heutigen Stande unserer Wissenschaft gelegt hat. Als Schriftsteller hat er an Fruchtbarkeit kaum seines Gleichen: die Anzahl seiner selbstständigen Schriften und Abhandlungen beträgt beinahe ein Tausend; und wenn, wie begreiflich, sich unter dieser ungeheuren Anzahl auch manche unbedeutende Arbeiten befinden, so sind sie, obgleich bis zum Jahre 1727 zurückgehend, meist noch nicht veraltet, sondern bilden in vielen Fällen den Ausgangspunkt neuer Untersuchungen.

Euler war für lange Zeit der letzte Mathematiker deutscher Abstammung. — Das Principat in unserer Wissenschaft ging auf Frankreich über; Clairaut, d'Alembert, Lagrange, Laplace, das sind die glänzendsten Namen unter Euler's Zeitgenossen, welche die Wissenschaft auf dem neu gewonnenen Boden bebauten und ihr zahlreiche neue Gebiete eröffneten, namentlich, nachdem die Newtonische Theorie der Planetenbewegungen die Antipathie der Leibnizischen Schule überwunden katte.

Es ist schwer, im Allgemeinen zu charakterisiren, wodurch sich diese Periode, das Ende des vorigen Jahrhunderts, von der Euler'schen unterscheidet. — Wesentlich ist es doch nur die grössere Allgemeinheit der Gesichtspunkte.

Euler's Art zu arbeiten, war in der Hauptsache die, dass er zunächst seine Kräfte auf ein specielles Problem concentrirte, und so zu einer speciellen Auflösungsmethode gelangte. Daran schliesst sich dann in einer folgenden Abhandlung häufig ein zweites, jenem verwandtes, ein drittes, viertes Problem, das er wiederum mit einer speciellen, jener ersten verwandten, aber dem neuen Probleme angepassten Form behandelt. Hierin ist er unübertrefflich; kein zweiter Mathematiker kommt ihm gleich an Fülle analytischer Gedanken und an Geschick, die Methoden der speciellen Problem zu accommodiren. Er war eine wesentlich concrete Natur, die sich mit wirklicher Liebe und Begeisterung dem Stoffe hingab und sich von ihm treiben liess. Man hat ihn die

„lebendige Analysis“ genannt, und ich möchte sagen: Euler stand mit den Problemen „auf Du und Du“. Daher geht durch alle seine Schriften ein warmer, lebendiger Zug; man liest zwischen den Zeilen überall begeisterte Freude über die Schönheit und wunderbare Tiefe, die ihm der Gegenstand offenbart. Mit behaglicher Breite, die nicht jedes einzelne Wort ängstlich abwägt, erzählt er, was ihn seine Untersuchungen gelehrt haben — und so lesen sich, wie man gesagt hat, seine Schriften, wie „Novellen“.

Einen anderen Charakter zeigen die ihm nachfolgenden französischen Mathematiker, in's Besondere der grösste unter ihnen: Lagrange. Er ist im Gegensatze zu Euler, eine durchaus abstracte Natur. Ihn interessirt nicht das einzelne Problem und ein artiger Satz; vielmehr ist sein Blick auf das Allgemeine gerichtet, was aus dem Speciellen durch Abstraction folgt. Allgemeine Methoden und Theoreme sind sein Ziel; die Eleganz der Methode bedeutet ihm fast mehr, als das Resultat selbst. Daher gilt er für den eleganten Mathematiker *par excellence,* aber seine Eleganz hat etwas Kaltes, Vornehmes; seine Schreibart ist reflectirt und knapp; von der Behaglichkeit Euler's unterscheidet sie sich durch ihre Beschränkung auf das absolut Nothwendige.

Diese Eigenthümlichkeiten sind seitdem allgemeine Züge der Mathematik geworden — und sie mussten es werden. Denn hätte man in der bequemen Weise Euler's fortgearbeitet, so wäre das Material bald zu einem nicht zu überwältigenden Umfange angewachsen.

Lagrange bedauerte zuweilen im Scherze die nachfolgenden Generationen von Mathematikern, dass sie ausser den Quartanten Euler's, die er bereits studirt habe, auch die lesen müssten, die er selbst geschrieben. Die Sache hat sich indess für uns neuere Mathematiker günstiger gestaltet, als es Lagrange erschien. Eben seine Quartanten haben uns meistens der Mühe überhoben, die zahllosen Schriften seines grössten Vorgängers zu studiren; denn wir finden in ihnen *in nuce*, was uns Euler *in extenso* erzählt.

Allgemeinheit der Gesichtspuncte und Methoden, Präcision und Eleganz der Darstellung, sind seit Lagrange Gemeingut aller derer geworden, die auf den Rang wissenschaftlicher Mathematiker Anspruch machen dürfen. Und, wenn auch jene Allgemeinheit zuweilen auf Kosten der Anschaulichkeit und Brauchbarkeit übertrieben, zum Abstrusen führt, so dass allgemeine Sätze aufgestellt werden, die in keinem speciellen Falle gelten; wenn ferner jene Präcision zuweilen in eine gesuchte Kürze ausartet, welche eine Abhandlung schwieriger zu lesen macht, als sie zu schreiben war; wenn endlich auch jene Eleganz der Form in unseren Tagen fast zum Kriterium über den Werth oder Unwerth eines Satzes geworden ist, — so sind doch alle diese Bedingungen für die gedeihliche Entwickelung dadurch von höchster Bedeutung, dass sie das wissenschaftliche Material in den Grenzen halten, die innerlich und äusserlich nothwendig sind, wenn die Mathematik sich nicht in's Kleinliche zersplittern oder am Ueberfluss ersticken soll.

Fiele die Forderung weg, dass jede Untersuchung einen, wenn auch noch so geringen wissenschaftlichen Fortschritt ausmachen, von allgemeiner Bedeutung und in der Form elegant sein soll — so würde ein Chaos von einzelnen Sätzen entstehen und die Wissenschaft als solche zu Grunde gehen. Einzelne, sogenannte „hübsche Sätze" haben an und für sich in den Augen eines modernen Mathematikers noch weniger Werth, als für den wissenschaftlichen Botaniker die Entdeckung einer neuen „hübschen Blume", obgleich dem Laien gerade hierin der Hauptreiz der betreffenden Wissenschaft zu liegen pflegt.

Blickt man in solche mathematische Journale, die jenes Kriterium fallen gelassen haben, so sieht man, welch' üppiges Unkraut da wuchert, wo die Scheere des prüfenden Gärtners und die Frage fehlt, *quid usui*?

Ich brauche an einem akademischen Orte nicht zu sagen, dass dieser Usus, dieser Nutzen der entwickelten Sätze in keiner Weise ausserhalb der mathematischen Wissenschaft selbst gesucht werden darf. Es ist wahr, dass im vorigen Jahrhundert die Astronomie und in dem jetzigen die auf mathematische Grundlagen zurückgeführte Physik eine Anzahl von Problemen aufgestellt haben und noch aufstellen, welche von Einfluss auf den Fortschritt der Mathematik gewesen sind und zur Ausbildung herrlicher Theorieen geführt haben, auf die man aus rein mathematischem Interesse niemals gekommen wäre. Gleichwohl ist es gewiss, dass die Entwicklung unserer Wissenschaft in ihren Hauptzügen frei aus sich

heraus von Anfang an mit innerer Nothwendigkeit erfolgt ist. Die mathematischen Arbeiten eines Platon, Euklid, Archimedes, Diophant, sind unabhängig von jedem practischen Bedürfnisse entstanden. Die Algebra, welche das 16. Jahrhundert beherrscht, ist eine von den Disciplinen, welche von allem möglichen Gebrauche, ausserhalb der reinen Mathematik, möglichst weit entfernt sind; — die analytische Geometrie, wie die Differential- und Integralrechnung, verdanken ihren Ursprung rein mathematisch-wissenschaftlichen Bedürfnissen; — und die, unserer Zeit eigenthümliche Richtung auf gewisse transscendente Functionen der Integralrechnung und die Untersuchung algebraischer Curven frägt so wenig nach der practischen Anwendbarkeit ihrer Theorieon, dass es bis jetzt nicht einmal möglich ist, den Punkt zu bezeichnen, wo sie in Physik oder Astronomie je werden einsetzen können.

Die Mathematik folgt frei ihren eigenen Bahnen; zwar nicht mit der zügellosen Freiheit, die keinen Gesetzen unterliegt, sondern mit der Freiheit, die sich aus ihrer Natur heraus und mit ihr in Uebereinstimmung selbst determinirt. Es wäre wohl eine interessante Aufgabe, diesen immanenten Gesetzen, welche die scheinbare Willkühr thatsächlich beschränken, an der Hand der Geschichte nachzuspüren. Ich begnüge mich hier, auf eine Eigenthümlichkeit in der Entwickelung der Mathematik hinzuweisen, die vielleicht eine weitere methodologische Bedeutung hat:

Die Philosophie hat von ihren ersten Anfängen an

fast dieselben Probleme gehabt, als noch jetzt; überall hat sie die nächstliegenden, entweder durch alltägliche Beobachtung oder durch ein dringendes geistiges Bedürfniss gegebenen Probleme lebhaft angegriffen, oft schon für bewältigt gehalten, um nach kurzer Freude mit Enttäuschung zu sehen, dass jene Probleme gleich Felsenburgen noch immer in unerreichbarer Ferne stehen.

Die Mathematik ist thatsächlich ganz anders verfahren. Auch ihr sind sogleich am Anfange und später in ihrem Fortschritte fundamentale Probleme entgegengetreten. Sie hat aber das Glück gehabt, schon früh zu der practischen Erkenntniss zu kommen, dass Festungen auch umgangen werden können, und dass man, beim directen, hastigen Angriff zurückgeschlagen, zunächst Streifzüge in das umgebende Gebiet zu machen, das Land rings umher zu besetzen hat, bis man die verborgenen Wege entdeckt, von denen aus jener scheinbar unerreichbare Punkt sicher und leicht genommen werden kann. Einige Beispiele mögen das näher erläutern:

Der einfachste Begriff, der sich unmittelbar aus dem des Zählens entwickelt, ist der von der Theilbarkeit ganzer Zahlen. Sobald man sich nur der Zahlenreihe bewusst wurde, entdeckte man in ihr Zahlen, welche überhaupt nicht theilbar sind. Die orientalische Anschauung fand in diesen (z. B. der 7) ein heiliges Geheimniss, der griechische wissenschaftliche Sinn aber suchte das Gesetz zu finden, nach welchem diese sogenannten Primzahlen in der Reihe der natürlichen

Zahlen aufeinander folgen. Das natürlichste Verfahren, um zu entscheiden, ob eine gegebene Zahl eine Primzahl sei oder nicht, wird es sein, mit allen kleineren Zahlen in jene zu dividiren; und zu sehen, ob eine Division ohne Rest aufgeht oder nicht. Man kann sich denken, welche Mühe die Arithmetiker darauf verwandt haben, dies so zu sagen empirische Verfahren, dem bereits von Eratosthenes unter dem Namen des „Siebes" eine übersichtliche Form gegeben wurde, durch ein theoretisches zu ersetzen. Trotzdem hat die Mathematik bis in die neueste Zeit in dieser Beziehung keinen Schritt über Euklid hinaus gethan, der bereits bewiesen hatte, dass es eine unendliche Menge solcher Zahlen gibt. Im Jahre 1810 endlich bemerkte Gauss, dass die Häufigkeit der Primzahlen in den höhern Regionen der Zahlenreihe in wunderbarem Zusammenhange steht mit einer kurz zuvor entdeckten transscendenten Function der Analysis, dem sogenannten Integrallogarithmus. Dies höchst paradoxe, zuerst nur empirisch beobachtete Phänomen hat denn in den letzten Jahren seine Erklärung gefunden, indem es Riemann gelungen ist, mit Hülfe der feinsten Theorieen aus den neuesten Theilen der Integralrechnung, das Gesetz der Primzahlen in einer analytischen Formel zum Ausdruck zu bringen, deren ungemeine Complication es aber bisher verhindert hat, den in ihr verborgenen Schatz an das Tageslicht zu fördern.

Wie nun, wenn die Arithmetiker sich von diesem fundamentalen Probleme nicht hätten losreissen können, in der Meinung, seine Lösung müsse der jedes anderen

vorausgehen? Man besässe dann vermuthlich keine Arithmetik; man wäre nicht von der Stelle gekommen, oder hätte in Verzweifelung, mit klaren Begriffen durchdringen zu können, zu allgemeinen und vagen Vorstellungen seine Zuflucht genommen.

Die Thatsache, dass die im Enoncé einfachsten, sich beim Eingange in die Wissenschaft sofort darbietenden Probleme in vielen Fällen nicht diejenigen sind, deren Lösung am leichtesten ist und zur Auflösung anderer scheinbar zusammengesetzter verhilft, sondern, dass die Behandlung letzterer der der fundamentalen Probleme vorangehen muss; dass es oft nöthig ist, erst eine ganze Reihe zusammengesetzter wissenschaftlicher Begriffe auszubilden, ehe man die scheinbar einfachsten Begriffe vollständig erfassen und jene ersten Probleme überhaupt nur in rechter Weise aufstellen kann, ist eine in der Mathematik durch zahlreiche Beispiele erweisliche Thatsache:

Die schon im 5. Jahrhundert v. Chr. aufgestellten berühmten Probleme der Verdoppelung des Würfels und der Trisection des Winkels fanden erst später durch Sätze der höheren Geometrie eine Lösung, die freilich der ursprünglichen Absicht nicht ganz entsprach.

Die algebraische Auflösung der Gleichungen höherer Grade ist drei Jahrhunderte lang vergeblich angestrebt, und erst neuerdings in wesentlich veränderter Fassung möglich geworden.

Die in der Anschauung so ausserordentlich einfachen Sätze von den parallelen geraden Linien, streng und

ohne ein unerweisliches Postulat zu begründen, darauf verzichtete schon Euklid und mit ihm die folgenden Geometer. Hätten sie das nicht gethan, so wäre die Mathematik in einen engen Kreis von elementaren Begriffen gebannt geblieben, aus denen kein Ausweg möglich ist, und wäre just soweit gekommen, als die Metaphysik mit dem Begriffe des Seins, oder der Bewegung, oder der Kraft u. s. w., welche man durchaus an die Spitze der Wissenschaft stellen und ohne Hilfe anderer Begriffe erläutern will — was nun eben nicht angeht.

Wir haben hier nur ein einzelnes jener eigenthümlichen Entwickelungsgesetze der Mathematik hervorgehoben; es liessen sich aber aus der Geschichte unserer Wissenschaft noch gar manche Lehren herauslesen, welche mit unbewusster Nothwendigkeit aus ihrem Wesen folgend, ihren gleichmässigen und schnellen Fortschritt bedingt haben. Wenn Abweichungen von dieser inneren Nothwendigkeit bei einzelnen Forschern vorkommen, so corrigirt die Gesammtheit der Entwickelung diesen Fehltritt. Dass eine ganze Schule oder eine ganze Periode sich in dieser Weise verirrt hat, ist selten — aber doch noch am Ende des vorigen Jahrhunderts in Deutschland in besonders auffälliger Weise vorgekommen.

Die Mathematik war in unserem Vaterlande nach dem Tode K e p p l e r's gar traurig bestellt; in dem Zeitraume von 200 Jahren zwischen Keppler und Gauss hat Deutschland ausser Leibniz fast keinen nennenswerthen Mathematiker aufgebracht.

Christian Wolff, der Leibnizens geniale Gedanken in eine pedantische Scholastik zwängte, hat das geringe Verdienst, die Elemente der seit der Renaissance ausgebildeten Arithmetik, Algebra und Analysis in der Form Euklid's dargestellt zu haben — aber freilich nur in der äusseren Form; denn in den Geist derselben ist er ebensowenig eingedrungen, als die Baumeister seiner Zeit, welche die antiken Formen in Säulen, Architraven und Ornamenten handhabten, die constructive und ästhetische Nothwendigkeit begriffen haben, welche diese Formen, als ihren Zweck erfüllend und darstellend, einst geschaffen hatten.

Man halte diese Analogie nicht für ein Spiel des Zufalls! Wer die Geschichte der Mathematik kennt und ein offenes Auge für den typischen Charakter einer Zeit hat, kann den Einfluss nicht übersehen, den Zeitcharakter und Volkseigenthümlichkeit auf die Entwickelung der mathematischen Wissenschaft ausgeübt haben. Wäre es mir erlaubt, diese Thatsache hier ausführlich zu begründen, so würden Sie, hochverehrte Herren, in dem Zustande der Mathematik in jeder Epoche den Reflex aller der Eigenthümlichkeiten erkennen, welche jene Zeit charakterisiren. Es ist eben Mathematik auch eine Wissenschaft, die von Menschen betrieben wird, und jede Zeit, sowie jedes Volk hat nur Einen Geist.

Wie aber Wolff dem Geiste seiner Zeit entsprach, das beweist zur Genüge der Umstand, dass seine Lehrbücher, die in ihrer pedantischen Form und Dürftigkeit

einen merkwürdigen Contrast bilden mit den eleganten und reichhaltigen Werken, in denen französische und schweizer Gelehrte die neue Wissenschaft bereits vorher dargestellt hatten, das mathematische Studium beherrschten, bis sie von den fast noch dürftigeren Schriften eines Mannes abgelöst wurden, der den Literarhistorikern als Epigrammendichter wohl bekannt ist, von dem der Geschichtsschreiber der Mathematik aber kaum mehr zu sagen weiss, als dass er Nichts geleistet hat. Ich spreche von Kästner, der seiner Zeit nicht nur als vorzüglicher Lehrer, sondern auch als Wunder eines Mathematikers galt und dessen überall verbreitete Lehrbücher trotz ihrer Gehaltlosigkeit und geschmacklosen Weitschweifigkeit von dienstbeflissenen Schülern noch mit Commentaren versehen wurden, die fast einen bornirten Leser vorauszusetzen scheinen.

Das war der Zustand der Mathematik in Deutschland zur Zeit des siebenjährigen Krieges. Ausländische Mathematiker (Maupertuis, Euler, d'Alembert, Lagrange) bildeten die Zierde der Berliner Akademie, aber sie blieben einsam, ohne Einfluss auf den Zustand der Wissenschaft in unserem Vaterlande.

Da erwachte endlich der Trieb zu eigener Production, und schuf einen neuen Zweig der Mathematik: die combinatorische Analysis, die man an Bedeutung der Differential- und Integralrechnung an die Seite zu setzen wagte. In Leipzig entstand um 1780 unter ihrem Meister Hindenburg diese Schule, die mit erfreulicher Begeisterung an's Werk ging und in lobenswerthem

Fleisse bald eine umfangreiche Literatur schuf. Bis in die 30er Jahre unseres Jahrhunderts hatte diese sogenannte combinatorische Schule fast alle Lehrstühle Deutschlands inne, und heute — ist sie völlig vergessen, während die gleichzeitigen Arbeiten der französischen Mathematiker in Aller Händen sind.

Den Grund dieser merkwürdigen Erscheinung im Allgemeinen zu bezeichnen, ist leicht: die Probleme der combinatorischen Analysis lagen nicht im nothwendigen Entwickelungsgange der Wissenschaft; schwer aber ist es, im Einzelnen zu bezeichnen, warum nicht? Denn jene Probleme (die Umkehrung, Potenzirung unendlicher Reihen u. s. w.) liegen allerdings dem Analytiker nahe genug, und ihre Lösungen durch die combinatorische Analysis entbehren nicht der Allgemeinheit und Eleganz. Die Combinatoriker behandelten aber diese Probleme mit einem einseitigen Interesse, ohne den steten Rückblick auf das ganze Gebiet der Analysis; sie vergassen, dass Formeln, und wären sie noch so elegant, nicht der Zweck sind, sondern nur das Mittel, durch welches die Analysis die Grössenrelationen zu beherrschen sucht, und so arbeiteten sie sich in einen ungeheuren Formalismus hinein, der, ob zwar allgemein, doch in keinem speciellen Falle anwendbar war. Schwerer aber, als alle pragmatischen Reflexionen über den Werth dieser neuen Disciplin wiegt das Zeugniss der Geschichte, welches dieselbe als entbehrlichen Balast und unnützen Luxus verworfen hat.

Es ist, so zu sagen, ein wissenschaftlicher Tact, welcher die Mathematiker bei ihren Untersuchungen leiten, und sie davor bewahren muss, ihre Kräfte auf wissenschaftlich werthlose Probleme und abstruse Gebiete zu wenden, ein Tact, der dem ästhetischen nahe verwandt, das einzige ist, was in unserer Wissenschaft nicht gelehrt und gelernt werden kann, aber eine unentbehrliche Mitgift eines Mathematikers sein sollte.

Es ist, als ob diese Gabe den Deutschen mit einem Male verliehen worden sei. Denn während man noch am Anfange dieses Jahrhunderts fast nur französische Mathematiker nennen kann, einen Legendre, Monge, Carnot, Ampère, Fourier, Poisson, Cauchy, Poncelet, Gergonne u.a., und der grösste deutsche Mathematiker Gauss seinen kühnen Weg einsam wandelte, so treten um das Jahr 1830 in Deutschland plötzlich eine Reihe von Männern auf, welche sich nicht allein in hervorragender Weise an dem Fortschritte der Wissenschaft betheiligten, sondern auch das Studium der Mathematik mit besonderem Erfolge belebten. Obenan das Triumvirat: Jacobi, Lejeune-Dirichlet und Steiner; ihnen schliesst sich eine ganze Reihe gleichzeitiger trefflicher Mathematiker: Möbius, v. Staudt, Plücker, Eisenstein, Richelot, Hesse, Kummer u.a. an. Von diesen ist dann die Generation der jetzt lebenden Mathematiker gebildet, aus deren grosser Anzahl ich einzelne Namen herauszuheben mir nicht erlauben darf.

Das Principat in der Mathematik fällt jetzt unstrei-

tig Deutschland zu, und, wenn auch Frankreich in Männern, wie Chasles, Liouville u. a. noch eine Anzahl tüchtiger Veteranen zählt, so fehlt es doch an genügendem Nachwuchs, der mit den Deutschen erfolgreich concurriren könnte; denn der Franzos lernt nicht gern vom Deutschen.

Die Engländer, bei denen bis vor Kurzem aus Pietät gegen ihren grossen Landsmann Newton die Mathematik völlig still stand, haben sich neuerdings eng an Deutschland angeschlossen und Gelehrte, wie Hamilton, Cayley, Sylvester, Salmon u. s. w., sind auf das Lebhafteste in der Wissenschaft thätig.

Füge ich noch hinzu, dass auch die Italiener in neuester Zeit mit Erfolg die Schriften deutscher Mathematiker studirt und in Cremona, Brioschi u. a. bedeutende Namen aufzuweisen haben, so sehen Sie, hochverehrte Herren, mit welchem Stolze Deutschland heute auf seine mathematische Stellung blicken kann *), zugleich aber auch, welche grossartigen Fort-

---

*) Der mathematische Unterricht auf denjenigen Universitäten, wo rührige Thätigkeit der Docenten, durch günstige äussere Verhältnisse, besonders zeitgemässe Examinationsregulative, unterstützt worden ist, hat mit diesem wissenschaftlichen Gange im Allgemeinen Schritt gehalten und es sind Disciplinen in den Kreis des Unterrichts gezogen worden, von denen die Studirenden vorher nicht einmal den Namen kannten.

Von der Universität Göttingen, an der die Mathematik immer in vortrefflicher Weise vertreten gewesen ist, stehen mir die Vorlesungsverzeichnisse des letzten Jahrhunderts zu Gebote und es hat vielleicht die Zusammenstellung der in jedem der nachbezeichneten

schritte unsere kosmopolitische Wissenschaft unter Betheiligung aller Culturnationen machen muss.

Ein grosser Theil der Arbeit unserer Zeit bezieht sich auf die algebraischen Functionen; vor Allem auf die Integrale solcher, welche zuerst 1826 von dem norwegischen Mathematiker Abel, dann von Weierstrass und Riemann in neuer epochemachender Weise behandelt worden sind, und in Zukunft eines der wichtigsten Capitel der Mathematik zu werden versprechen.

Die allgemeinen Eigenschaften der krummen Linien und Flächen algebraischer Art sind in neuerer Zeit durch Plücker, Cayley, Hesse, Clebsch u. a. nach analytischer Methode untersucht worden und haben eine ungeahnte Fülle der elegantesten Theoreme geliefert. Ein neuerlich ausgebildetes Rechnungsinstrument, die Determinante, hat hiebei, sowie in vielen an-

---

Jahre angekündigten rein mathematischen Vorlesungen ein instructives Interesse.

1767. Mathesis pura (nach Kästner's Anfangsgründen und Wolff's Auszuge aus den Anfangsgründen). Algebra (nach Kästner). Niedere Analysis. Geometrie und sphärische Trigonometrie.

1817. Reine Mathematik (nach Thibaut's Schriften). Analysis des Endlichen nebst der höheren Geometrie. Differential- und Integralrechnung.

1867. Geometrie. Sphärische Trigonometrie. Numerische Gleichungen. Analytische Geometrie. Anwendung der Infinitesimalrechnung auf die Geometrie. Algebraische Analysis. Differential- und Integralrechnung. Theorie der bestimmten Integrale. Die partiellen Differentialgleichungen. Theorie der complexen Functionen (nach Riemann). Elliptische Functionen (nach Jacobi). Potentialfunctionen. Mathematische Theorie der Elektrodynamik. Theorie der Zahlen, vorzüglich der quadratischen Formen. Determinanten.

deren Untersuchungen wiederum gezeigt, welchen Nutzen ein zweckmässig ausgebildeter Formalismus haben kann.

Das Problem, die algebraischen Gleichungen höherer Grade aufzulösen, das seit dem 16. Jahrhundert das unerreichte, heiss ersehnte Ziel zahlreicher mathematischer Untersuchungen war, ist endlich in neuester Zeit durch Abel, Galois, Hermite, Kronecker u. a. erfolgreich angegriffen. Abel hat durch ein geniales Raisonnement dargethan, dass das Problem in der gewöhnlichen Fassung überhaupt nicht lösbar sein kann, und es haben sich daher die Kräfte der Algebraiker erst seitdem auf den richtigen Punct concentriren können. Die Bemühungen sind endlich dadurch gekrönt worden, dass Hermite die wirkliche Auflösung der allgemeinen Gleichungen fünften Grades entdeckte.

Neben der Algebra schreitet die Analysis, die Theorie der höheren Transscendenten der Integralrechnung, die Integration der Differentialgleichungen u. s. w., rüstig vorwärts. Vor wenig Jahren hat sie einen neuen epochemachenden Anstoss erhalten, der, wenn nicht alles täuscht, zu einer gewaltigen Umgestaltung der ganzen Functionentheorie führen und, den ganzen Gehalt der jetzigen Analysis in sich aufnehmend, weit über diese hinausgehen wird. Es ist dieser neue Fortschritt mit Hilfe eines Begriffes gemacht worden, der bereits seit Euler, wenn auch mit stillem Proteste und nur als Rechnungshilfsmittel, in die Analysis eingeführt war, der sogenannten imaginären oder unmöglichen Grössen.

Ein tieferes Eingehen auf die Grundbegriffe der Mathematik hat aber gelehrt, dass diese „unmöglichen" Grössen, die wie ein unfassbares Gespenst in der Analysis umgingen, ebenso reelle und wirkliche Grössen sind, als alle andern; und so hat bereits vor 50 Jahren der französiche Mathematiker Cauchy von ihnen einen nicht nur subsidiären, sondern principiellen Gebrauch gemacht. In neuerer Zeit hat dann mein hochverehrter, der Wissenschaft leider so früh entrissener, Lehrer Riemann auf die consequente Anwendung imaginärer Grössen eine neue Theorie der Functionen complexer, d. h. aus Reellem und Imaginärem zusammengesetzter, Variabelen gegründet, die in wunderbarer Weise die ganze Natur der Functionen erhellt, ihren Begriff vertieft, und die Leistungsfähigkeit der Analysis ausserordentlich erhöht hat *). Die Geschichte wird dieser neuen Richtung einst den ihr gebührenden Rang anweisen.

Es ist aber nicht die Analysis allein, welche das Interesse der jetzigen Mathematiker in Anspruch nimmt. Die lange vernachlässigte Geometrie hat seit 50 Jahren wieder ihr Haupt erhoben und sich zu einer „neueren Geometrie" herausgebildet, welche die Vorzüge der synthetischen Methode der Alten, die räumliche Anschauung der Grössenverhältnisse selbst, und die der analytischen Methode, die Allgemeinheit und Gleich-

*) Der Verf. empfindet gewiss nicht weniger lebhaft, als der fachkundige Leser das Fragmentarische dieser Bemerkungen über die neueren Fortschritte unserer Wissenschaft. Der Zweck dieser Rede aber verbot jede weitere Ausführung.

förmigkeit der Principien, mit einander verbindet, ohne die Nachtheile beider, die Ueberladung mit ineleganten Figuren oder die Unterdrückung der Anschauung durch algebraischen Calcul, zu theilen. Poncelet, Möbius, Steiner, Chasles, v. Staudt u. a. sind die Väter dieser neuen Disciplin, welche sich der Analysis völlig ebenbürtig an die Seite stellt.

Euklid hatte einst seinem Könige Ptolemäus, der, wie wir begeifen, das mühsame Studium der „Elemente“ abschreckend fand, mit dem ganzen Stolze eines Gelehrten erwidert: „Es gibt keinen Königsweg zur Mathematik.“ Wir aber können hinzufügen: die neuere Geometrie ist dieser Königsweg, sie hat „den Organismus aufgedeckt, durch welchen die verschiedenartigsten Erscheinungen in der Raumwelt mit einander verbunden sind“, und hat, wie wir ohne Uebertreibung sagen können, das Ideal einer Wissenschaft beinahe erreicht.

So sind fast alle Theile unserer Wissenschaft in erfreulicher, reger Entwickelung begriffen, ohne dass ein Ende dieses Fortschreitens vorauszusehen wäre. Denn die Mathematik hat vielleicht mehr, als jede andere Wissenschaft die Tendenz, nach allen Richtungen hin in's Unendliche zu wachsen. Alle anderen Wissenschaften bewegen sich durch Gegensätze hindurch und oscilliren, wenn es gut geht, in immer kleineren Spiralwindungen asymptotisch um das durch ihren Stoff gesetzte Ziel, wenn sie es auch in dieser Endlichkeit nie erreichen. Die Mathematik aber besitzt kein solches

begrenztes bestimmtes Ziel, weil sie es nicht mit einem positiv gegebenen Materiale zu thun hat, dessen Merkmale und Eigenschaften zu bestimmen wären, sondern mit der Mannigfaltigkeit der Formen des Anschaulichen und Abstracten, die ebenso unendlich sind, als die Anschauung und das Denken selbst. In den meisten Wissenschaften pflegt eine Generation das niederzureissen, was die andere gebaut, und was jene gesetzt, hebt diese auf. In der Mathematik allein setzt jede Generation ein neues Stockwerk auf den alten Unterbau. Die Fundamente, die Euklid vor mehr als zweitausend Jahren gelegt, sind auch die des mathematischen Gebäudes, wie es jetzt besteht. Von seinen Nachfolgern hat jeder einen Stein oder einen Pfeiler hinzugefügt; und, was eine spätere Zeit an dem alten Werke verändert, ist nichts weiter, als dass sie mit stärkeren Pfeilern ein altes Stockwerk stützt, oder einen für die Gesammtconstruction entbehrlichen Stein herauswirft, um mehr Luft und Licht, mehr Einheit und Plan in das Gebäude zu bringen.

So ist denn der schöne gewaltige Bau entstanden, dessen Anblick den Mathematiker mit Stolz erfüllt; denn fest gegründet, auf unerschütterlichen Fundamenten steigt er planmässig, durch jenen wissenschaftlich-ästhetischen Tact geleitet, gewaltig empor, an seinen Aussenwerken durch zierliche Thürme geschmückt und scheinbar vollendet, während im Inneren Hunderte von eifrigen Arbeitern den unendlichen Bau weiter in's Unendliche hinausführen. Möchte er vor den Schicksalen des Thurmes zu Babel bewahrt bleiben!

In die Geheimnisse dieses Baues junge, frische Geister und strebsame Kräfte einzuführen, das ist die schöne Aufgabe eines akademischen Lehrers. Sollen wir uns begnügen, da unten in den alten Fundamenten zu weilen und die Arbeit einer neuen Zeit unbeachtet lassen, als lebten wir vor zweitausend Jahren? Ich weiss, wenn man die Frage so stellt, ist ihre Antwort unzweifelhaft. Und doch macht man an den Universitätslehrer noch immer Anforderungen, welche nichts anderes besagen. Wenn man es auch an und für sich gerechtfertigt findet, dass die akademischen Vorträge hoch hinauf in die Spitzen der Wissenschaft eindringen, so warnt man doch ängstlich vor zu schnellem Fluge; man betont es ausdrücklich und mit Vorliebe, dass die Anfänger zuerst in den Fundamenten recht sicher zu Hause sein müssen, ehe sie den steilen Weg zu jenem Hochbau antreten können. Und das ist richtig, jedoch mit Einschränkung: Es ist nicht nöthig, jeden Stein in den Fundamenten und jede Zierrath an denselben zu kennen. Hat der Schüler den Unterbau in seinen grossen Grundzügen verstanden, dann hinauf in die Höhe! Von oben erst kann man den Bau der Fundamente und ihren Zweck recht erkennen. Wer zu lange da unten bleibt, verliert die Lust und die Kraft, den Gang in die Höhe zu wagen. *Where is a will, there is a way.*

Man liebt es, uns Mathematikern vorzuwerfen, dass wir nicht genug Rücksicht nehmen auf die Kräfte der Anfänger. Die Praxis, sagt man, lehrt es, wie viele auf jenem Gange erschöpft zurückbleiben. Hochver-

ehrte Herren! Die schlechte Praxis läugnet die Möglichkeit jedes Fortschrittes, ehe er gemacht ist; und ich habe ein unbegrenztes Vertrauen zu der Kraft der akademischen Jugend. Man mache höhere Ansprüche und sie werden erfüllt werden! „Es wächst der Mensch mit seinen höhern Zielen", das ist eine Thatsache und keine Phrase.

Ich weiss freilich, dass das Studium der höheren Mathematik eine grössere Anstrengung erfordert, als das der Elemente; indess soll eben die Wissenschaft kein Spiel, sondern ernste Lebensarbeit sein. Wenn durch diesen Ernst solche abgeschreckt werden, die ernten wollen, ohne gesäet zu haben, so ist dies für die Wissenschaft mehr ein Vortheil, als ein Schaden.

In Göttingen lehrte neben Gauss seiner Zeit ein wissenschaftlich ganz unbedeutender Mathematiker, Thibaut, die Elemente vor hundert Zuhörern aus allen Facultäten, während Gauss kaum ein halbes Dutzend aufbrachte. Wenn ich die Wahl hätte, – möchte ich lieber Gauss, als Thibaut sein.

Der Grundsatz meiner akademischen Thätigkeit ist: Will man gewiss sein, ein mittleres Ziel zu erreichen, so stelle man sich das höchste; wer nur nach Mittelmässigkeit strebt, wird auch diese nicht erreichen.

Hochansehnliche Versammlung! Ich meine, es ist das Ziel unserer akademischen Vorlesungen, das ganze Ideal der Wissenschaft denen vorzuführen, die dieser ihr Leben widmen wollen. Es ist ohnehin dafür gesorgt, dass die Bäume nicht in den Himmel wachsen!



